ANZEIGER

DER

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

Jahrgang 1929 Nr. 27

Sitzung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse vom 12. Dezember 1929

Der Vorsitzende macht Mitteilung von dem am 27. November 1929 erfolgten Ableben des korrespondierenden Mitgliedes im Auslande Geheimrat Dr. Wilhelm Biedermann, emer. Professors der Physiologie an der Universität in Jena.

Das wirkl. Mitglied Friedrich Becke legt die folgende von ihm verfaßte Mitteilung vor:

»Über Systematik und Nomenklatur der 32 Symmetrieklassen der Krystalle.«

Der im Titel genannte Gegenstand hat die Deutsche Mineralogische Gesellschaft auf ihren Tagungen in Duisburg 1926 und Breslau 1927 intensiv beschäftigt. F. Becke, E. Schiebold und F. Rinne haben in Breslau sich in Vorträgen vernehmen lassen und F. Rinne hat seine Vorschläge in endgültiger Form im Jahre 1929 im XL. Bande der Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften veröffentlicht, daher erscheint es mir zweckmäßig, der Wiener Akademie einen kurzen Bericht über den Stand der Frage vorzulegen, die für den Unterricht in der Krystallographie nicht unwichtig ist, um so mehr, als ich hoffe zeigen zu können, daß die Mehrzahl der Autoren kaum mehr in sachlichen Fragen getrennt sind, sondern sich eigentlich nur in der Form der Darstellung unterscheiden.

Bekanntlich hat das wirkl. Mitglied der Wiener Akademie, G. Tschermak, unter Benützung einer Abhandlung von B. Minnigerode[1], der zuerst, soviel mir bekannt, auf die strenge Analogie der tetragonal-sphenoidischen und der tetragonal-skalenoedrischen Klasse mit den beiden trigonotypen Abteilungen des hexagonalen

---

[1] B. Minnigerode. Über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle. N. Jahrbuch f. Miner. usw. Beil., Bd. 5. p. 145 bis 166, 1887.

Systems hingewiesen hatte, eine sehr klare Systematik der 32 Krystaltklassen ausgearbeitet und hierüber publiziert.[1]

Ganz G. Tschermak's geistiges Eigentum ist der Gedanke, zunächst die vier einfachsten Fälle der Symmetrie an die Spitze zu stellen, wodurch, den Fall völliger Asymmetrie mitgerechnet, sich fünf Stufen der Symmetrie ergeben, und die übrigen Symmetrieklassen durch gesetzmäßige Wiederholung der fünf Ausgangstufen aufzubauen.

Die fünf einfachsten Symmetriestufen sind:

1. Stufe: Mangel jeder Symmetrie.
2. Stufe: Zu jeder Fläche ist eine symmetrisch gleiche parallele Gegenfläche vorhanden. Nach heutiger Auffassung: Der Krystall besitzt ein Symmetriezentrum, *Z*. Deckoperation: Inversion.
3. Stufe: Zu jeder Fläche ist eine deckbar gleiche (kongruente) Fläche vorhanden. Sie sind gleich geneigt gegen eine vorhandene oder mögliche Kantenrichtung. Durch eine Drehung um 180° (Hemitropie) kommt die zweite Fläche mit der ersten zur Deckung. Heutige Bezeichnung: Der Krystall besitzt eine zweizählige Deckachse. Zeichen: *A*2.
4. Stufe: Zu jeder Fläche ist eine symmetrisch gleiche Fläche vorhanden. Die beiden Flächen sind gleich geneigt gegen dieselbe vorhandene oder mögliche Fläche. Ein Schnitt nach dieser Krystallfläche teilt den Krystall in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften. Heutige Bezeichnung: Der Krystall besitzt eine Spiegelebene. Zeichen: *S*.
5. Stufe: Jede beliebige Kombination von zweien der drei Stufen 2, 3 oder 4 führt automatisch die Flächenlage gemäß der fehlenden Stufe herbei. Nach jetziger Auffassung: Zwei von den Symmetrieelementen Zentrum, zweizählige Deckachse, Spiegelebene bringen stets eine Flächenanlage herbei, welche das dritte noch fehlende Element befriedigt.

Von den fünf einfachen Symmetriestufen entsprechen 1 und 2 den beiden Krystallklassen des triklinen Systems, die folgenden, 3, 4 und 5, drei Krystallklassen des monoklinen Systems. Verbindet man die einfachsten Symmetriestufen mit einer vertikalen zweizähligen Deckachse oder, wie der von Rinne vorgeschlagene kurze Ausdruck lautet, mit einer Digyre, so liefert Stufe 1 und 2 nichts Neues, sondern nur eine Wiederholung der Stufen 3 und 5 des monoklinen Systems, dagegen ergeben die Stufen 3, 4, 5 drei Krystallklassen des rhombischen Systems. Durch Verbindung der fünf Symmetriestufen mit einer vertikalen Tri-, Tetra- und einer Hexagyre ergeben sich je fünf Krystallklassen des trigonalen, tetragonalen und hexagonalen Systems. Für das tesserale System endlich ist

[1] Ausführlich, G. Tschermak, Einheitliche Ableitung der Krystallisations- und Zwillingsgesetze. Zeitschr. f. Kryst., Bd. 39, p. 433 bis 462, 1904. Kürzer, Lehrbuch der Mineralogie, Wien, Alfred Hölder, 6. Aufl., p. 43 u. ff., 1905.

charakteristisch ein Komplex von vier Trigyren in den Richtungen der Körperdiagonalen des Würfels, das liefert weitere fünf Symmetrieklassen des tesseralen Systems; auf diese Weise werden:

$$2+3+3+5+5+5+5 = 28 \text{ Symmetrieklassen}$$

abgeleitet.

Die restlichen vier Symmetrieklassen, zwei des tetragonalen, zwei des hexagonalen Systems, leitet Tschermak nach dem Gesetz der Bipolarität ab. Dieses besagt: Zu jeder Anordnung von deckbar gleichen Krystallflächen, welche eine Achse am selben Ast schneiden (monopolare Anordnung), gibt es eine andere, bei welcher die Hälfte der gleichen Flächen durch ihre symmetrisch gleichen, parallelen Gegenflächen ersetzt sind (bipolare Anordnung).

Indem Tschermak das Gesetz der Bipolarität auf die Stufen 1 und 4 des tetragonalen und hexagonalen Systems mit monopolarer Flächenlage anwendet, erhält er die vier Symmetrieklassen: tetragonal-disphenoidisch und skalenoedrisch sowie trigonal- und ditrigonal-dipyramidal, von welchen die letzten drei sich durch Kombinationen von Deckachsen und Spiegelebenen definieren lassen. während die tetragonal-disphenoidische Klasse durch einfache Symmetrieelemente überhaupt nicht darstellbar ist. Daher fehlt diese Klasse und die ganze Folge ihrer Verwandten bei Bravais und dieser Fehler wurde erst 1884 von P. Curie aufgedeckt.

Was Tschermak durch sein »Gesetz der Bipolarität« erreicht, nämlich die Verknüpfung deckbar gleicher (kongruenter) und spiegelbildlich gleicher (symmetrisch gleicher) Krystallflächen zu einer und derselben Krystallform, läßt sich auch durch die Konzeption der »zusammengesetzten Symmetrieelemente« erzielen. Das ist die Koppelung einer Deckdrehung mit einem der Symmetrielemente zweiter Art, so zwar, daß beide nur gekoppelt zur Wirkung kommen. Fedorow war der erste, der eine n-zählige Deckdrehung um eine Achse mit der Spiegelung an der zur Achse normalen Ebene verband und als n-zählige Achse und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie aufstellte und die Bedeutung dieser Konstruktion nach meiner Meinung zu hoch wertete. Namentlich sollte durch die zweizählige Achse und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie, welche die Gleichheit jeder Fläche mit ihrer parallelen Gegenfläche zur Folge hat, das Symmetriezentrum aus der Reihe der selbständigen Symmetrieelemente entfernt werden und nur als Spezialfall der zusammengesetzten Achse und Ebene der zusammengesetzten Symmetrie gelten. Groth und andere sind ihm in dieser Auffassung gefolgt. Von Schönflies rührt der Name Spiegelachse für dieses zusammengesetzte Symmetrieelement und Respiegelung für die zugehörige Deckoperation her. Von Schönflies rührt auch das Zeichen der n-zähligen Spiegelachse her: Sn.

In einer Abhandlung in der Zeitschrift für Krystallogie, Bd. 39. p. 33, 1895, zeigte ich, daß gleichberechtigt mit der n-zähligen

Spiegelachse *Sn* auch die Koppelung einer *n*-zähligen Deckdrehung mit der Inversion sei, für welches zusammengesetzte Symmetrieelement ich den Namen Inversionsachse und das Zeichen *Jn* vorschlug. Zwischen den beiden zusammengesetzten Symmetrieelementen bestehen folgende Beziehungen:

$$J3 = S6 = A3 + Z,$$

$$J4 = S4 = A2,$$

$$J6 = S3 = A3 + S.$$

Außerdem ist jede $J2$ gleichbedeutend mit einer Spiegelebene normal zur Achsenrichtung, jede $S2$ gleichbedeutend mit dem Symmetriezentrum. $J4$ und $S4$ lassen sich durch irgendeine Kombination einfacher Symmetrieelemente nicht restlos wiedergeben, obgleich beide eine Deckdrehung $A2$ in sich enthalten.

Man bemerke ferner, daß die Kennziffern von $J4$ und $J6$ mit der Kennziffer der Wiederholung des zugehörigen Krystallsystems übereinstimmen, was bei den Spiegelachsen $S3$ und $S6$ nicht zutrifft.

In einer eingehenden, von Rinne veranlaßten Studie zeigt E. Schiebold,[1] daß die 230 Raumgruppen der Krystalle in der Weise abgeleitet und charakterisiert werden können, daß die 32 Symmetrieklassen in richtiger Form als Grenzfälle zum Vorschein kommen, indem man die für die Raumgruppen charakteristischen, mit Translation verknüpften Schraubungen und Gleitspiegelungen fortläßt. J. Beckenkamp rechnet in seinen Publikationen[2] die trigonal-dipyramidale und die ditrigonal-dipyramidale Klasse ebenfalls zum hexagonalen System, so daß die kompetentesten Autoren durch ernste sachliche Differenzen nicht mehr getrennt erscheinen.

Tabelle I gibt eine vollständige Übersicht der Symmetrieverhältnisse der 32 Krystallklassen. Sie zerfällt in sechs Horizontalreihen, von denen die ersten zwei die Krystalle von einfachem Bau umfassen. Die drei folgenden enthalten die Krystalle von wirteligem Bau, in der sechsten Reihe sind die Krystalle von regulärem Bau vereinigt. Dazu kommt eine Gliederung in Vertikalreihen. Die Vertikalkolumnen 1 und 3 enthalten alle Krystallklassen mit Enantiomorphie, die Kolumnen 2 und 5 alle Klassen mit Flächenparallelismus. In Kolumne 1 und 4 sind die Klassen mit polarer Vertikalachse vereinigt, ferner gehören die tesseralen Klassen mit vier polaren, dreizähligen Achsen in dieselbe Vertikalkolumne. Ist die große Zahl von Symmetrieelementen in Tabelle I vielleicht etwas schwer zu übersehen, so

---

[1] Über eine neue Herleitung und Nomenklatur der 230 krystallographischen Raumgruppen. Abhandlung der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, Bd. XL, 1929, p. 15 u. ff.

[2] Der Krystall als homogenes Polyeder. Neues Jahrb. f. Min., Bd. LIV, Abt. A, 1926, p. 52, 53.

Tabelle I.

Übersicht der Symmetrie-Elemente der 32 Krystalle.

	Triklin		Monoklin					
Stufe	I	II	III	IV	V	I *a*	IV *a*	
	O	*Z*	*A* 2 ↑	*S*	*A* 2 *Z* *S*	—	— —	Einfacher Bau
Rhombisch	—	—	*A* 2 . *A* 2 ! *A* 2'' — —	*A* 2 ↑ — *S* . *S'*	*A* 2 . *A* 2 ! *A* 2'' *Z* *S* . *S'* . *S''*	—	— —	
Trigonal	*A* 3 ↑ — —	*A* 3 *Z* —	*A* 3 . *A* 2 ↑ —	*A* 3 ↑ — 3 *S*	*A* 3 . 3 *A* 2 *Z* 3 *S*	—	— —	Wirteliger Bau
Tetragonal	*A* 4 ↑ — —	*A* 4 *Z* *S*	*A* 4 . 2 *A* 2 . 2 *A* 2' — —	*A* 4 ↑ — 2 *S* . 2 *S'*	*A* 4 . 2 *A* 2 . 2 *A* 2' *Z* *S* . 2 *S* ! 2 *S''*	*J* 4 — —	*J* 4 . 2 *A* 2 — 2 *S*	
Hexagonal	*A* 6 ↑ — —	*A* 6 *Z* *S*	*A* 6 . 3 *A* 2 . 3 *A* 2' —	*A* 6 ↑ — 3 *S* . 3 *S'*	*A* 6 . 3 *A* 2 . 3 *A* 2' *Z* *S* . 3 *S* ! 3 *S''*	*J* 6 — *S*	*J* 6 . 3 *A* 2 ↑ — *S* . 3 *S*	
Tesseral	4 *A* 3 ↑ 3 *A* 2 —	4 *A* 3 . 3 *A* 2 *Z* 3 *S*	4 *A* 3 . 3 *A* 4 . 6 *A* 2 —	4 *A* 3 ↑ . 3 *A* 2 — 6 *S*	4 *A* 3 . 3 *A* 4 . 6 *A* 2 *Z* 3 *S* . 6 *S*	—	—	Regulärer Bau
	Enantiomorph Polar	Zentrisch	Enantiomorph	Polar	Zentrisch			

bemerkt man in Tabelle II, welche lediglich die erzeugenden Symmetrieelemente anführt und die aus diesen automatisch sich ableitenden vorerst bei Seite läßt, eine bedeutende Vereinfachung erkennen. In der Tat reichen, wenn man von den fünf einfachsten Stufen absieht, bei deren Mehrzahl schon ein Symmetrieelement zur Charakterisierung hinreicht, vom rhombischen System aufwärts zwei Angaben aus, um die Symmetrieklasse völlig zu charakterisieren. Die erste gibt den Rhythmus der Wiederholungen und bestimmt das Krystallsystem, die zweite Angabe gibt das Stufensymbol und gibt den Flächenkomplex, der entsprechend dem ersten Symbol zu wiederholen ist.

Tabelle II. Übersicht der erzeugenden Symmetrieelemente der 32 Krystallklassen.

	Triklin			Monoklin			
Stufe	I	II	III	IV	V	I*a*	IV*a*
	0 — —	*Z* — —	*A*2 — —	*S* — —	*A*2 *Z* *S*	— — —	— — —
Rhombisch	— — —	— — —	*A*2.*A*2' — —	*A*2 — *S*	*A*2.*A*2' *Z* *S*	— — —	— — —
Trigonal	*A*3 — —	*A*3 *Z* —	*A*3.*A*2 — —	*A*3 — *S*	*A*3 *Z* *S*	— — —	— — —
Tetragonal	*A*4 —	*A*4 *Z* —	*A*4.*A*2 — —	*A*4 — *S*	*A*4 *Z* *S*	*J*4 — —	*J*4 — *S*
Hexagonal	*A*6 — —	*A*6 *Z* —	*A*6.*A*2 — —	*A*6 — *S*	*A*6 *Z* *S*	*J*6 — —	*J*6 — *S*
Tesseral	4*A*3 — —	4*A*3 *Z* —	4*A*3.*A*2 — —	4*A*3 — *S*	4*A*3 *Z* *S*	— — —	— — —

Vergleicht man mit den Tabellen I und II, in denen die Systematik nach Tschermak dargestellt ist, mit der Tabelle III, Plan der 32 Symmetrieklassen nach der zitierten Abhandlung von F. Rinne, so zeigt sich, abgesehen von einigen formellen Unterschieden, von denen noch zu sprechen sein wird, eine weitgehende Übereinstimmung des sachlichen Inhalts. Übereinstimmend ist die Gliederung in Horizontalreihen, entsprechend den Krystallsystemen, und in Vertikalkolumnen, entsprechend den Stufen. Übereinstimmend ist die Zuordnung der beiden trigonal-dipyramidalen Klassen in das hexagonale Krystallsystem und die Charakterisierung der vier »gyroidalen Symmetrieklassen« durch die ihnen zugeschriebenen Inversionsachsen (Punktgyroiden).

Das bedeutet eine wichtige Annäherung an die Systematik Tschermak's, denn noch 1922 reihte Rinne, obzwar er die Tschermak'sche Stufensystematik im allgemeinen würdigte, die beiden trigonotypen Klassen im trigonalen System ein, wo sie nur stören, weil es unmöglich ist, im trigonalen System mit sieben Klassen eine holoedrische Klasse aufszustellen, welche sowohl den Kalkspat als den Benitoit als Untergruppen bezüglich der Symmetrie enthalten würde. Auch insofern sind die bezüglichen Symmetrieklassen dem hexagonalen System einzugliedern, als die Symmetrieverhältnisse ihrer Hauptachse: dreizählige Deckachse mit einer zur Achse normalen Spiegelebene die Wiederholung nach mehreren Richtungen des Raumes verbieten und nur in der Achse parallelen Lagen derselben Krystallart sich wiederholen können, wie die übrigen Modifikationen der hexagonalen Hauptachsen.

Tabelle III. Plan der 32 Krystallklassen nach Rinne.

Baustufen	I. Gyrische Herleitung					II. Zentrogyroidische Herleitung	
	1. Pediale Stufe	2. Pinakoidale Stufe	3. Sphenoidische Stufe	4. Domatische Stufe	5. Prismatische Stufe	1 *a*. Pediale Stufe	4 *a*. Domatische Stufe
Urformen: Triklines und monoklines System	*p*	*pi*		*d*	(*sd*)		
Zweizähliger Rhythmus der Urformen: Rhombisches System			2*s*	2*d*	2(*sd*)		
Dreizähliger Rhythmus der Urformen: Trigonales System	3*p*	3*pi*	3*s*	3*d*	3(*sd*)		
Vierzähliger Rhythmus der Urformen: Tetragonales System	4*p*	4*pi*	4*s*	4*d*	4(*sd*)	$\dot{4}p$	$\dot{4}d$
Sechszähliger Rhythmus der Urformen: Hexagonales System	6*p*	6*pi*	6*s*	6*d*	6(*sd*)	$\dot{6}p$	$\dot{6}d$
Tetraedrisch-dreizähliger Rhythmus der Urformen: Kubisches (reguläres) System	*tp*	*tpi*	*ts*	*td*	*t*(*sd*)		

Zu meiner lebhaften Befriedigung anerkennt jetzt Rinne auch neben der ihm und den meisten deutschen Krystallographen seit Fedorow, Groth und Schoenflies geläufigen Spiegelachse nunmehr die gleichberechtigte Konzeption der Inversionsachse. Er unterscheidet die beiden als Plangyroiden und Punkt- oder Zentrogyroiden und führt als Zeichen ein für die Spiegelachse oder Plangyroide die den Rhythmus der Wiederholung bezeichnenden arabischen Ziffer mit einem Strich unter der Zeile, die Inversionsachse oder Punktgyroide mit einem Punkt über der Zeile. So gerne ich mich der kurzen und treffenden Unterscheidung von Gyren (Deckachsen) und Gyroiden (zusammengesetzten Symmetrieachsen) anschließe, möchte ich doch gegen die vorgeschlagene Benennung den Einwand erheben, daß jede dem Vorwurf der »vox hybrida« ausgesetzt ist.

Die Tabelle III, Plan der 32 Symmetrieklassen, sieht zwar formell anders aus als die Tabellen I und II, in denen versucht wurde, die Tschermak'sche Stufensystematik darzustellen, aber in den wesentlichen Stücken herrscht weitgehende Übereinstimmung. Auch die Rinne'sche Tabelle zeigt eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, in der die Stellung der Symmetrieklassen, abgesehen von den fünf Urformen, bestimmt ist durch zwei Angaben, von denen die erste den Rhythmus der Wiederholung, mit anderen Worten das Krystallsystem bezeichnet, die andere die Zugehörigkeit zu einer der Stufen. Die letztere wird durch die abgekürzte Bezeichnung der Urform nach Groth gegeben. Wenn also die Symmetrieklasse des Apatit das Zeichen erhält: 6*pi*, so besagt 6 die Zugehörigkeit zum hexagonalen System, *pi* die Herleitung vom Pinakoid. Dagegen hat für die Benennung der Name Hexagonaldipyramidal nach Groth einzutreten.

Ich möchte daher statt Plangyroide sagen: Stilbogyroide (hergenommen von Stilbe στιλβη spiegelnde Fläche), statt Punktgyroide: Stigmogyroide (von Stigme στιγμη Punkt). Die Bezeichnung könnte durch Anfügung der Buchstaben »*b*« und »*g*« hinter die den Wiederholungsrhythmus kennzeichnenden Ziffern erfolgen.

Es würde also die sechszählige Inversionsachse oder Hexastigmogyroide das Zeichen erhalten: 6*g*. Die sechszählige Spiegelachse oder Hexastilbogyroide (Hauptachse des Dolomit) das Zeichen erhalten: 6 *b*.

Der letzte Abschnitt des Plans der 32 Symmetrieklassen würde folgende Form annehmen:

	II. Stigmogyroidische Herleitung:	
	I*a*	IV*a*
	pedial	domatisch
Tetragonales System	4*g*.*p*	4*g*.*d*
Hexagonales	6*g*.*p*	6*g*.*d*